



شهید بهشتی

نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: عبارات گویا

تهیه و تنظیم: سالاری

۱- ریشه بیست و سوم عبارت $\frac{2^{\frac{2}{3}} \times 4^{\frac{7}{3}}}{32^{\frac{2}{3}} \times 27^{-\frac{1}{3}} \times 48^{-\frac{1}{4}}}$ کدام است؟

- ① $\sqrt[3]{6}$ ② $\sqrt{12}$ ③ $\sqrt[3]{3}$ ④ $\sqrt[3]{3}$

۲- اگر $2 = \sqrt[3]{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ باشد، حاصل عبارت $\frac{x^2 - 1}{x}$ کدام است؟

- ① ۶ ② ۲ ③ ۱۴ ④ ۱۲

۳- در نامعادله $3 \leq \sqrt[3]{x} \leq -2$ ، چند مقدار صحیح برای x می توان یافت؟

- ① ۸۰ ② ۸۲ ③ ۶۵ ④ ۶۶

۴- اگر ریشه پنجم عدد x برابر $\frac{3}{4}$ و ریشه سوم عدد y برابر $\frac{4}{3}$ باشد، حاصل ضرب ریشه دوم مثبت عدد y در ریشه چهارم مثبت عدد x کدام است؟

- ① $4\sqrt[4]{3}$ ② $\frac{4}{\sqrt[4]{3}}$ ③ $\frac{4}{\sqrt[4]{6}}$ ④ $4\sqrt[4]{27}$

۵- اگر $7^x = \sqrt{7}$ و $3^y = \sqrt[3]{7}$ باشد، مقدار xy کدام است؟

- ① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ ۴ ④ ۳

۶- حاصل عبارت $(3\sqrt{2} - \sqrt{20})(3\sqrt{2} - \sqrt{2})(3\sqrt{2} - \sqrt{3}) \dots (3\sqrt{2} - \sqrt{20})$ کدام است؟

- ① $(3\sqrt{2})^{20} - 20$ ② $(3\sqrt{2})^{20} + 20$ ③ $(3\sqrt{2})^{20} - 20\sqrt{20}$ ④ صفر

۷- اگر $18 = x^2 + \frac{1}{x^2}$ باشد، مقدار $x^3 - \frac{1}{x^3}$ کدام است؟

- ① ± 52 ② ± 76 ③ ± 46 ④ ± 72

۸- حاصل کسر $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{8} + \sqrt{18}}{\sqrt{50} - \sqrt{8}}$ کدام است؟

- ① ۱ ② ۲ ③ ۳ ④ ۴

۹- حاصل عبارت $\frac{x^6 + 1}{x^5 - x^3 + x}$ به ازای $x = -2\sqrt{2}$ کدام است؟

- ① -۱۲ ② $-\frac{9\sqrt{2}}{4}$ ③ $-9\sqrt{2}$ ④ $-\frac{9}{2}\sqrt{2}$

۱۰- اگر a عددی مثبت باشد، کدام عبارت درست است؟

- ① اگر $\sqrt[3]{a} < a$ ، آن گاه a قطعاً عددی بین صفر و ۱ است. ② اگر $\sqrt[3]{a} = a$ ، آن گاه a دو مقدار مختلف می تواند باشد.
③ اگر $\sqrt[3]{a} < a$ ، آن گاه a هر عدد دلخواه مثبتی می تواند باشد. ④ اگر $\sqrt[3]{a} > a$ ، آن گاه a قطعاً عددی بین صفر و ۱ است.

۱۱- اگر $0 < a < 1$ باشد، چند مورد از موارد زیر درست است؟

- الف) $\sqrt[3]{a} > \sqrt{a}$ ب) $a^2 > a^4$ ج) $\sqrt{-a} < \sqrt[3]{-a}$ د) $\sqrt[3]{a^2} < \sqrt[3]{a^3}$
① ۴ ② ۳ ③ ۲ ④ ۱



۱۲- اگر $0 < a < 1$ باشد، حاصل $|a^3 - \sqrt[3]{a}| - |a - a^3| - |a - \sqrt[3]{a}|$ کدام است؟

- ۱) $2a$ ۲) صفر ۳) $-2\sqrt[3]{a}$ ۴) $-2a^3$

۱۳- در تجزیه‌ی عبارت $x^2 + x(-2y - 1) + (-3y + 1)(y - 2)$ کدام عامل وجود دارد؟

- ۱) $x - y - 2$ ۲) $x - y + 2$ ۳) $x + y + 2$ ۴) $x + y - 2$

۱۴- اگر $\frac{3}{2} = \left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{3x-2}{x}}$ ، آنگاه x کدام است؟

- ۱) $\frac{7}{4}$ ۲) $\frac{4}{7}$ ۳) ۱ ۴) صفر

۱۵- حاصل عبارت $(\sqrt{7} + \sqrt{6})^{\sqrt{5}+2} (\sqrt{7} - \sqrt{6})^{\frac{1}{\sqrt{5}-2}}$ کدام است؟

- ۱) ۱ ۲) -۱ ۳) $\sqrt{5} + 2$ ۴) $\sqrt{5} - 2$

۱۶- عبارت $x^6 - 1$ همواره با کدام عبارت زیر برابر است؟

- ۱) $(x-1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)$ ۲) $(x-1)(x+1)(x^2+x+1)^2$
۳) $(x+1)(x^2+x-1)(x-1)(x^2-x-1)$ ۴) $(x^2-1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

۱۷- در تجزیه $27a^5 + 27a^3b^2 + b^3a^2 + b^5$ کدام عامل وجود دارد؟

- ۱) $a^2 - b^2$ ۲) $3a - b$ ۳) $3a + b$ ۴) $a^2 + b$

۱۸- چه تعداد از عبارات زیر نادرست است؟

الف) هر عدد مثبت دارای ۲ ریشه چهارم است که با هم قرینه‌اند.

ب) ریشه سوم هر عدد از خود آن عدد کم‌تر است.

پ) ریشه چهارم اعداد مثبت از ریشه سوم‌شان کم‌تر است.

- ۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) صفر

۱۹- حاصل $\frac{1}{3\sqrt{8} - \sqrt{50} + \sqrt{3}}$ کدام است؟

- ۱) $\sqrt{3} - 1$ ۲) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ ۳) $\sqrt{3} + 1$ ۴) $\sqrt{3} + \sqrt{2}$

۲۰- ساده شده عبارت مقابل کدام است؟

- ۱) $xy^2 - 1$ ۲) $y^2 - x$ ۳) $xy - x + 1$ ۴) $y - x$
 $A = \frac{xy^3 + y^2 + y + 1 - x}{y^2 + y + 1}$

۲۱- بزرگترین مقسوم علیه مشترک سه جمله‌ای‌های $12x^2 - 12x - 9$ و $16x^2 + 16x + 4$ کدام است؟

- ۱) $2x + 1$ ۲) $2x + 2$ ۳) $4x + 1$ ۴) $4x + 2$

۲۲- در تجزیه عبارت $(x^2 - 6x - 4)^2 - 144$ کدام عامل وجود ندارد؟

- ۱) $x - 8$ ۲) $x - 4$ ۳) $x + 2$ ۴) $x + 4$

۲۲- حال $\frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{5} - \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{5} - \sqrt{2}}$ کدام است؟

- ۱) $\sqrt{5}$ ۲) $2\sqrt{5}$ ۳) $\sqrt{10}$ ۴) $\sqrt{\frac{5}{2}}$



۲۴- در تجزیه عبارت $x^7 - 8x$ کدام عامل وجود دارد؟

۴) $x - 2$

۳) $x^6 - 2x^2 + 4$

۲) $x + 2$

۱) $x + \sqrt{2}$

۲۵- حاصل عبارت تعریف شده $\frac{\sqrt{x} \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x} \sqrt{-x}}$ همواره کدام است؟

۴) $\frac{-1}{\sqrt[3]{-x}}$

۳) $\frac{1}{\sqrt[3]{-x}}$

۲) $-\sqrt[3]{-x}$

۱) $\sqrt[3]{-x}$

۲۶- در تجزیه عبارت $8a^9 - a^6b^3 + 8a^3b^3 - b^6$ کدام عامل وجود ندارد؟

۴) $2a + b$

۳) $2a - b$

۲) $4a^2 + 2ab + b^2$

۱) $a^6 + b^3$

۲۷- چه تعداد از عبارت‌های زیر نادرست هستند؟

الف) $\sqrt[3]{0,027} = \sqrt[3]{0,0081}$

ب) $(\sqrt[4]{-2})^4 = \sqrt[4]{(-2)^4}$

پ) $\sqrt[4]{(-5)^4} = -5$

ت) $\sqrt[3]{-3} \times \sqrt[3]{-9} \times \sqrt[4]{(-3)^4} = 9$

۴) ۴

۳) ۳

۲) ۲

۱) ۱

۲۸- اگر $x + y = 7$ و $xy = 5$ باشد، $x^3 + y^3$ کدام است؟

۴) ۲۶۴

۳) ۲۴۴

۲) ۲۳۸

۱) ۲۱۶

۲۹- در تجزیه عبارت $y^5 + 2y^3 - 24y$ کدام عامل وجود ندارد؟

۴) $y - 4$

۳) $y + 2$

۲) $y - 2$

۱) $y^2 + 6$

۳۰- حاصل عبارت $\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \dots + \frac{2^5}{1+x^{32}}$ کدام گزینه است؟ ($x \neq \pm 1$)

۴) $\frac{64}{1-x^{64}}$

۳) $\frac{32}{1-x^{64}}$

۲) $\frac{64}{1+x^{64}}$

۱) $\frac{32}{1+x^{64}}$



پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۳ کل عبارت را A می‌نامیم و داریم:

$$\begin{cases} (24)^{\frac{2}{3}} = (3 \times 8)^{\frac{2}{3}} = (3 \times 2^3)^{\frac{2}{3}} = 3^{\frac{2}{3}} \times 2^2 \\ 4^{\frac{5}{2}} = (2^2)^{\frac{5}{2}} = 2^5 \\ (32)^2 = (2^5)^2 = 2^{10} \\ (27)^{-\frac{1}{3}} = (3^3)^{-\frac{1}{3}} = 3^{-1} \\ 48^{\frac{-1}{4}} = (3 \times 16)^{\frac{-1}{4}} = (3 \times 2^4)^{\frac{-1}{4}} = 3^{\frac{-1}{4}} \times 2^{-1} \end{cases}$$

$$A = \frac{2^2 \times 3^{\frac{2}{3}} \times 2^5}{2^{10} \times 3^{-1} \times 2^{-1} \times 3^{\frac{-1}{4}}} = \frac{2^9 \times 3^{\frac{2}{3}}}{2^9 \times 3^{\frac{-5}{4}}} = 3^{\frac{2}{3} + \frac{5}{4}} = 3^{\frac{8+15}{12}} = 3^{\frac{23}{12}}$$

$$A \text{ ریشه بیست و سوم} = \sqrt[23]{A} = A^{\frac{1}{23}} = (3^{\frac{23}{12}})^{\frac{1}{23}} = 3^{\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{3}$$

۲ - گزینه ۳ می‌دانیم $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ است.

$$\sqrt[3]{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = 2 \xrightarrow{\text{توان ۳}} (\sqrt[3]{x})^3 - 3(\sqrt[3]{x})^2 \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) + 3(\sqrt[3]{x}) \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^3 = 8$$

$$\Rightarrow x - 3\sqrt[3]{x} + \frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x} = 8 \Rightarrow x - \frac{1}{x} - \underbrace{3\left(\sqrt[3]{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)}_2 = 8$$

$$\Rightarrow x - \frac{1}{x} = 8 + 2 = 10 \Rightarrow \frac{x^2 - 1}{x} = 10$$

۳ - گزینه ۲

$$-2 \leq \sqrt[4]{x} \leq 3 \Rightarrow 0 \leq \sqrt[4]{x} \leq 3 \xrightarrow{\text{به توان ۴}} 0 \leq x \leq 3^4 \Rightarrow 0 \leq x \leq 81$$

تعداد اعداد صحیح در این بازه: $81 - 0 + 1 = 82$

۴ - گزینه ۳

می‌دانیم: هر عدد مثبت دو ریشه m زوج به فرم $\pm \sqrt[n]{a}$ و یک ریشه m فرد به صورت $\sqrt[n]{a}$ دارد.

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}, \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

$$\sqrt[5]{x} = \frac{3}{2} \xrightarrow{\text{توان ۵}} x = \frac{3^5}{2^5} \xrightarrow{\text{ریشه چهارم}} \sqrt[4]{x} = \sqrt[4]{\frac{3^5}{2^5}} = \sqrt[4]{\frac{3^4 \times 3}{2^4 \times 2}} = \frac{3}{2} \sqrt[4]{\frac{3}{2}}$$

$$\sqrt[3]{y} = \frac{4}{3} \xrightarrow{\text{توان ۳}} y = \frac{4^3}{3^3} \xrightarrow{\text{ریشه دوم}} \sqrt{y} = \sqrt{\frac{4^3}{3^3}} = \sqrt{\frac{4^2 \times 4}{3^2 \times 3}} = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{4}{3} \times \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{\cancel{3}}{\cancel{3}} \times \sqrt{\frac{4}{2}} \times \frac{4}{\cancel{3}} \times \frac{\cancel{3}}{\sqrt{3}} = \frac{4 \times \sqrt{4}}{\sqrt{2} \times \sqrt{3}} = \frac{4 \times \sqrt{4}}{\sqrt{2} \times \sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{6}}$$

۵ - گزینه ۲

$$3^y = \sqrt{y} \xrightarrow{(\cdot)^2} 3^{2y} = y \xrightarrow{(\cdot)^x} 3^{2xy} = y^x \xrightarrow{y^x = \sqrt{3}} 3^{2xy} = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow 3^{2xy} = 3^{\frac{1}{2}} \Rightarrow 2xy = \frac{1}{2} \xrightarrow{\div 2} xy = \frac{1}{4}$$



۶ - گزینه ۴

می‌دانیم:

$$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}, \quad \sqrt[n]{x^n} = x$$

$$= \begin{cases} |a| & n \text{ زوج} \\ a & n \text{ فرد} \end{cases}$$

$$n \text{ زوج } a = b \leftarrow \text{مثبت}$$

داریم:

بنابراین:

$$3\sqrt{2} = \sqrt{3^2} \sqrt{2} = \sqrt{9} \sqrt{2} = \sqrt{9 \times 2} = \sqrt{18}$$

$$(3\sqrt{2} - \sqrt{1})(3\sqrt{2} - \sqrt{2}) \cdots \underbrace{(3\sqrt{2} - \sqrt{18})}_{\text{صفر}} (3\sqrt{2} - \sqrt{19})(3\sqrt{2} - \sqrt{20}) = 0$$

۷ - گزینه ۲

$$a^x - b^x = (a - b)(a^x + b^x + ab), \quad a^x + b^x = (a - b)^x + 2ab$$

$$x^x + \frac{1}{x^x} - 2 = 18 - 2 \Rightarrow \left(x - \frac{1}{x}\right)^x = 16 \xrightarrow{\sqrt{x}} x - \frac{1}{x} = \pm 4$$

$$x^x - \frac{1}{x^x} = \underbrace{\left(x - \frac{1}{x}\right)}_{\pm 4} \underbrace{\left(x^x + \frac{1}{x^x}\right)}_{18} + \underbrace{x \times \frac{1}{x}}_1 = (\pm 4) \times (18 + 1) = \pm 76$$

۸ - گزینه ۲ می‌دانیم: $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} \quad (n \rightarrow a, b > 0)$

$$\frac{\sqrt{2} + \sqrt{8} + \sqrt{18}}{\sqrt{50} - \sqrt{8}} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{2 \times 4} + \sqrt{2 \times 9}}{\sqrt{2 \times 25} - \sqrt{2 \times 4}} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{4}\sqrt{2} + \sqrt{9}\sqrt{2}}{\sqrt{25}\sqrt{2} - \sqrt{4}\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2}}{5\sqrt{2} - 2\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = 2$$

۹ - گزینه ۲

می‌دانیم که $(a+b)(a^x - ab + b^x) = a^x + b^x$ است.

$$\frac{x^6 + 1}{x^5 - x^3 + x} = \frac{(x^2)^3 + 1^3}{x(x^4 - x^2 + 1)} = \frac{(x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1)}{x(x^4 - x^2 + 1)} = \frac{x^2 + 1}{x}$$

$$\xrightarrow{x = -2\sqrt{2}} \frac{(-2\sqrt{2})^2 + 1}{-2\sqrt{2}} = \frac{8 + 1}{-2\sqrt{2}} = \frac{9}{-2\sqrt{2}} = \frac{9}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{-9\sqrt{2}}{2}$$

۱۰ - گزینه ۴

$$\sqrt[3]{a} < a, a > 0 \Rightarrow a > 1$$

$$\sqrt[3]{a} = a, a > 0 \Rightarrow a = 1 \quad a \text{ یک مقدار دارد.}$$

$$\sqrt[3]{a} > a, a > 0 \Rightarrow 0 < a < 1 \quad \text{بنابراین گزینه ۴ صحیح است.}$$

۱۱ - گزینه ۱

نکته: اگر $0 < a < 1$ باشد:

بررسی گزینه‌ها:

$$\text{الف) درست: } -1 < a < 0 \Rightarrow \sqrt[3]{a} > \sqrt[5]{a}$$

$$\text{ب) درست: } -1 < a < 0 \Rightarrow 0 < a^4 < a^2 < 1$$

$$\text{پ) درست: } -1 < a < 0 \Rightarrow 0 < a^2 < 1 \Rightarrow \sqrt[3]{a^2} < \sqrt[6]{a^2}$$

$$\text{ت) درست: } -1 < a < 0 \Rightarrow 0 < -a < 1 \Rightarrow \sqrt{-a} < \sqrt[3]{-a}$$

۱۲ - گزینه ۲

$$-1 < a < 0 \Rightarrow a^3 > \sqrt[3]{a} \Rightarrow a^3 - \sqrt[3]{a} > 0 \Rightarrow |a^3 - \sqrt[3]{a}| = a^3 - \sqrt[3]{a}$$

$$-1 < a < 0 \Rightarrow a < a^3 \Rightarrow a - a^3 < 0 \Rightarrow |a - a^3| = -a + a^3$$

$$-1 < a < 0 \Rightarrow a > \sqrt[3]{a} \Rightarrow a - \sqrt[3]{a} < 0 \Rightarrow |a - \sqrt[3]{a}| = a - \sqrt[3]{a}$$

$$|a^3 - \sqrt[3]{a}| - |a - a^3| - |a - \sqrt[3]{a}| = a^3 - \sqrt[3]{a} - (-a + a^3) - (a - \sqrt[3]{a})$$

$$= a^3 - \sqrt[3]{a} + a - a^3 - a + \sqrt[3]{a} = 0$$



۱۳ - گزینه ۴

$$\begin{aligned}
 x^2 + x(-2y - 1) + (-3y + 1)(y - 2) &= x^2 - 2xy - x - 3y^2 + 6y + y - 2 \\
 &= x^2 - 3y^2 - \underline{2xy} - \underline{x} + \underline{7y} - \underline{2} = (\underline{x^2} - \underline{3xy} + \underline{x}) + (\underline{xy} - \underline{3y^2} + \underline{y}) + (\underline{-2x} + \underline{6y} - \underline{2}) \\
 &= x(x - 3y + 1) + y(x - 3y + 1) - 2(x - 3y + 1) = (x - 3y + 1)(x + y - 2)
 \end{aligned}$$

۱۴ - گزینه ۲

$$a^{-b} = \frac{1}{a^b}$$

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{3x-2}{x}} &= \left(\left(\frac{2}{3}\right)^2\right)^{\frac{3x-2}{x}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{6x-4}{x}} = \frac{2}{3} \xrightarrow{\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = \frac{3}{2}} \frac{6x-4}{x} = -1 \\
 \xrightarrow{x \neq 0} 6x - 4 &= -x \rightarrow 7x = 4 \rightarrow x = \frac{4}{7}
 \end{aligned}$$

۱۵ - گزینه ۱

$$\frac{1}{\sqrt{5}-2} \times \frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}+2} = \frac{\sqrt{5}+2}{5-4} = \sqrt{5}+2$$

$$\begin{aligned}
 (\sqrt{7} + \sqrt{6})^{\sqrt{5}+2} (\sqrt{7} - \sqrt{6})^{\sqrt{5}+2} &= ((\sqrt{7} + \sqrt{6})(\sqrt{7} - \sqrt{6}))^{\sqrt{5}+2} \\
 &= (7 - 6)^{\sqrt{5}+2} = 1^{\sqrt{5}+2} = 1
 \end{aligned}$$

۱۶ - گزینه ۴

$$\begin{aligned}
 x^6 - 1 &= (x^3 - 1)(x^3 + 1) = (x - 1)(x^2 + x + 1)(x + 1)(x^2 - x + 1) \\
 &= (x^2 - 1)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)
 \end{aligned}$$

۱۷ - گزینه ۳

$$\begin{aligned}
 27a^5 + 27a^3b^2 + b^3a^2 + b^5 &= (3a)^3(a^2 + b^2) + b^3(a^2 + b^2) \\
 &= (a^2 + b^2)((3a)^3 + b^3) = (a^2 + b^2)(3a + b)(9a^2 - 3ab + b^2)
 \end{aligned}$$

۱۸ - گزینه ۲ الف درست

ب) نادرست: مثال نقض: $\sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2} > \frac{1}{8}$

پ) نادرست: مثال نقض: $\sqrt[4]{\frac{1}{16}} = \frac{1}{2} > \sqrt[3]{\frac{1}{16}}$

۱۹ - گزینه ۲

$$\frac{1}{3\sqrt{8} - \sqrt{50} + \sqrt{3}} = \frac{1}{6\sqrt{2} - 5\sqrt{2} + \sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{\sqrt{2} - \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{\sqrt{2} - \sqrt{3}} = \sqrt{2} - \sqrt{3}$$

۲۰ - گزینه ۳ می‌دانیم که $(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$ است.

$$\begin{aligned}
 \frac{xy^2 + y^2 + y + 1 - x}{y^2 + y + 1} &= \frac{(xy^2 - x) + (y^2 + y + 1)}{y^2 + y + 1} = \frac{x(y^2 - 1) + (y^2 + y + 1)}{y^2 + y + 1} \\
 &= \frac{x(y-1)(y^2 + y + 1) + (y^2 + y + 1)}{y^2 + y + 1} \\
 &= \frac{(y^2 + y + 1)(x(y-1) + 1)}{y^2 + y + 1} = x(y-1) + 1 = xy - x + 1
 \end{aligned}$$

۲۱ - گزینه ۱

$$A = 12x^2 - 12x - 9 = 3(4x^2 - 4x - 3) = 3(4x^2 + 2x - 6x - 3) =$$

$$3(2x(2x + 1) - 3(2x + 1)) = 3(2x + 1)(2x - 3)$$

$$B = 16x^2 + 16x + 4 = (4x + 2)^2 = 4(2x + 1)^2$$



$$\left. \begin{aligned} A &= 3(2x+1)(2x-3) \\ B &= 4(2x+1)^2 \end{aligned} \right\} \rightarrow B, A \text{ بزرگترین مقسوم علیه مشترک}$$

۲۲ - گزینه ۴

$$\begin{aligned} (x^2 - 6x - 4)^2 - 144 &= (x^2 - 6x - 4)^2 - 12^2 \\ &\xrightarrow{\text{مزنوج}} ((x^2 - 6x - 4) - 12)((x^2 - 6x - 4) + 12) \\ &= (x^2 - 6x - 16)(x^2 - 6x + 8) = (x-8)(x+2)(x-2)(x-4) \end{aligned}$$

۲۳ - گزینه ۳ عبارت مخرج را در صورت و مخرج کسر ضرب می کنیم:

$$\frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{5 - \sqrt{2}}} \times \frac{\sqrt{5} + \sqrt{5 - \sqrt{2}}}{\sqrt{5} + \sqrt{5 - \sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{5 - \sqrt{2}}}{5 - (5 - \sqrt{2})} = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{5 - \sqrt{2}}}{\sqrt{2}} \quad (1)$$

$$\frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{5 - \sqrt{2}}} \times \frac{\sqrt{5} - \sqrt{5 - \sqrt{2}}}{\sqrt{5} - \sqrt{5 - \sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{5 - \sqrt{2}}}{5 - (5 - \sqrt{2})} = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{5 - \sqrt{2}}}{\sqrt{2}} \quad (2)$$

در نتیجه بنابر (۱) و (۲) داریم:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{5 - \sqrt{2}}} + \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{5 - \sqrt{2}}} &= \frac{\sqrt{5} + \sqrt{5 - \sqrt{2}}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{5} - \sqrt{5 - \sqrt{2}}}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \xrightarrow{\text{گویا می کنیم}} \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{10}}{2} = \sqrt{10} \end{aligned}$$

۲۴ - گزینه ۱

نکته:

ابتدا از x فاکتور می گیریم، سپس با استفاده از اتحاد تفاضل مکعبات دو جمله عبارت داخل پرانتز را تجزیه می کنیم:

$$x^5 - 8x = x(x^4 - 8) = x(x^2 - 2)(x^2 + 2x^2 + 4) = x(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x^2 + 2x^2 + 4)$$

$$\left(\begin{aligned} \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} &= \sqrt[n]{ab} \\ \sqrt[n]{a^m} &= a^{\frac{m}{n}}, (a > 0) \end{aligned} \right. \text{ اگر } n \text{ زوج}$$

۲۵ - گزینه ۲ می دانیم:

$$\frac{\sqrt{x^3 \sqrt{x}}}{\sqrt[3]{x \sqrt{-x}}} = \frac{\sqrt{x \times x^{\frac{1}{2}}}}{\sqrt[3]{x \times (-x)^{\frac{1}{2}}}} = \frac{\sqrt{x^{\frac{3}{2}}}}{-\sqrt[3]{-x^{\frac{3}{2}}}} = \frac{\sqrt[6]{x^3}}{-\sqrt[6]{-x^3}} = -\sqrt[6]{-x}$$

۲۶ - گزینه ۴ می دانیم که $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ است.

$$\begin{aligned} \underbrace{\lambda a^3 - a^2 b^2 + \lambda a^2 b^2 - b^3}_{= (\lambda a^3 - b^3)(a^2 + b^2)} &= a^2(\lambda a^3 - b^3) + b^3(\lambda a^2 - b^2) \\ &= (\lambda a^3 - b^3)(a^2 + b^2) = (2a - b)(4a^2 + 2ab + b^2)(a^2 + b^2) \end{aligned}$$

بنابراین $2a + b$ در عبارت وجود ندارد.

$$\sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}, \sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} |a| & \text{زوج } n \\ a & \text{فرد } n \end{cases}$$

۲۷ - گزینه ۲ می دانیم:

الف) درست: $\begin{cases} \sqrt[3]{\circ \circ 27} = \sqrt[3]{(\circ \circ 3)^3} = \circ \circ 3 \\ \sqrt[4]{\circ \circ \circ 81} = \sqrt[4]{(\circ \circ 3)^4} = \circ \circ 3 \end{cases}$

ب) نادرست: $\begin{cases} \text{تعریف نشده: } (\sqrt[4]{-2})^4 \\ \sqrt[4]{(-2)^4} = |-2| = 2 \end{cases}$

پ) نادرست: $\sqrt[4]{(-5)^4} = |-5| = 5$

ت) درست: $\sqrt[3]{-3} \times \sqrt[3]{-9} \times \sqrt[4]{(-3)^4} = \sqrt[3]{(-3)(-9)} \times |-3| = \sqrt[3]{27} \times 3 = \sqrt[3]{3^3} \times 3 = 3 \times 3 = 9$



$$(x+y)^3 = x^3 + y^3 + 3x^2y + 3xy^2$$

$$(x+y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x+y)$$

$$7^3 = x^3 + y^3 + 3 \times 5(7)$$

$$7^3 = x^3 + y^3 + 105 \Rightarrow x^3 + y^3 = 238$$

۲۹ - گزینه ۴ ابتدا از y فاکتور گرفته و سپس از اتحاد یک جمله مشترک استفاده می‌کنیم:

$$y^5 + 2y^3 - 24y = y(y^4 + 2y^2 - 24) = y((y^2)^2 + 2y^2 - 24) = y(y^2 + 6)(y^2 - 4) = y(y^2 + 6)(y-2)(y+2)$$

اتحاد مزدوج

$$\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} = \frac{1+x+1-x}{1-x^2} = \frac{2}{1-x^2}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{1-x^2} + \frac{2}{1+x^2} = \frac{2+2x^2+2-2x^2}{1-x^4} = \frac{4}{1-x^4}$$

$$\Rightarrow \frac{4}{1-x^4} + \frac{4}{1+x^4} = \frac{4+4x^4+4-4x^4}{1-x^8} = \frac{8}{1-x^8}$$

.

.

.

$$\Rightarrow \frac{2^5}{1-x^{32}} + \frac{2^5}{1+x^{32}} = \frac{2^5 + 2^5 x^{64} + 2^5 - 2^5 x^{64}}{1-x^{64}} = \frac{2^6}{1-x^{64}}$$

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۳	۶ - ۴	۱۱ - ۱	۱۶ - ۴	۲۱ - ۱	۲۶ - ۴
۲ - ۳	۷ - ۲	۱۲ - ۲	۱۷ - ۳	۲۲ - ۴	۲۷ - ۲
۳ - ۲	۸ - ۲	۱۳ - ۴	۱۸ - ۲	۲۳ - ۳	۲۸ - ۲
۴ - ۳	۹ - ۲	۱۴ - ۲	۱۹ - ۲	۲۴ - ۱	۲۹ - ۴
۵ - ۲	۱۰ - ۴	۱۵ - ۱	۲۰ - ۳	۲۵ - ۲	۳۰ - ۴